Fuvest 2004 A Fuvest atrai milhares de estudantes de todo o país. O motivo é a oferta de vagas para a Universidade de São Paulo (USP). Outras instituições também oferecem vagas no concurso. Fazer as questões de Matemática da Fuvest 2004 é um bom exercício:

Questão 1

Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool.

Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool.

A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

a) 20%
b) 22%
c) 24%
d) 26%
e) 28%

RESOLUÇÃO

• Mistura inicial: 18% de 30L = 5,4L de álcool

• Mistura resultante: 20% de 40L = 8L de álcool

Logo, os 10L da mistura a ser adicionada devem conter 2,6L de álcool.

Portanto, a porcentagem de álcool nessa mistura deve ser de $\frac{2,6}{10}$, isto é, 26%.

Resposta: D

Questão 2

Um estacionamento cobra R$6,00 pela primeira hora de uso, R$3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$320,00.

Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é:

a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 29

RESOLUÇÃO

Sendo: x = nº de primeiras horas
y = nº de horas adicionais
R = receita diária

Então:

$x + y = 80 \therefore y = 80 - x$ (I)

$R = 6x + 3y$ (II)

substituindo-se (I) em (II):

$R = 6x + 3(80 - x) \therefore R = 3x + 240$

Para que o estacionamento obtenha lucro, devemos ter:

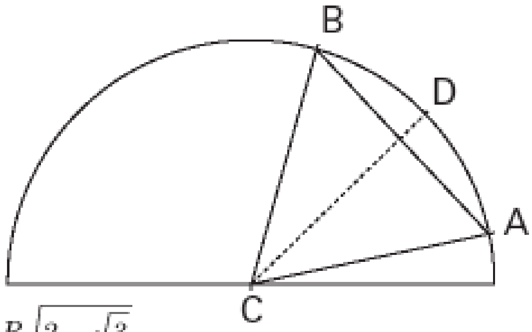
$R > 320 \therefore 3x + 240 > 320 \therefore x > 26,66...$ (III)

Como o número de usuários é igual ao número de primeiras horas, temos que o menor natural x que satisfaz III é 27.

Resposta: C

Questão 3

Em uma semi-circunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intercepta a semi-circunferência. O comprimento da corda AD é:



a) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b) $R\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

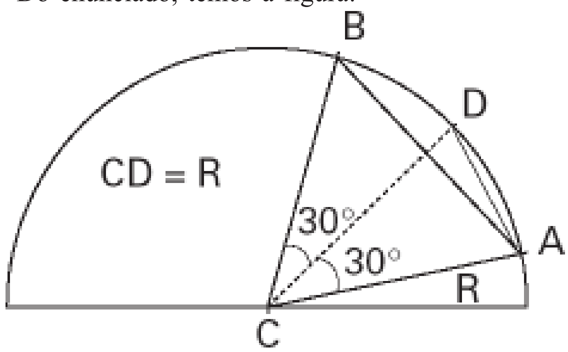
c) $R\sqrt{\sqrt{2}-1}$

d) $R\sqrt{\sqrt{3}-1}$

e) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$

RESOLUÇÃO

Do enunciado, temos a figura:



Aplicando o teorema dos co-senos no triângulo ACD, temos:

$$(AD)^2 = (CD)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot CD \cdot AC \cdot \cos 30°$$

$$(AD)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

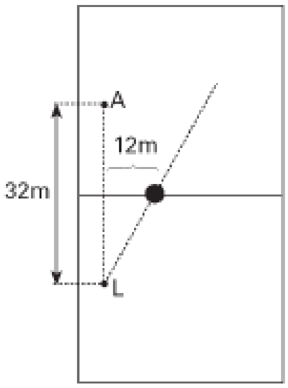
$$(AD)^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{3}$$

$$(AD)^2 = R^2(2 - \sqrt{3}) \quad \therefore \quad AD = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Resposta: A

Questão 4

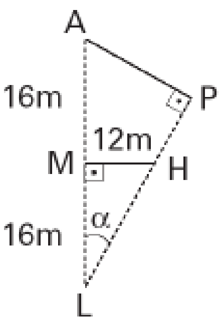
Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



a) 18,8m
b) 19,2m
c) 19,6m
d) 20m
e) 20,4m

RESOLUÇÃO

Do enunciado, temos a figura, na qual a distância pedida mede AP.



Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo LMH, temos:

$$(LH)^2 = (LM)^2 + (MH)^2$$

$$(LH)^2 = 16^2 + 12^2 \therefore LH = 20\,m$$

Como os triângulos LAP e LHM são semelhantes, resulta que:

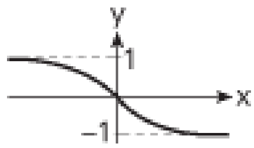
$$\frac{AP}{HM} = \frac{LA}{LH} \Rightarrow \frac{AP}{12} = \frac{32}{10} \quad \therefore \quad AP = 19{,}2\,m$$

Resposta: B

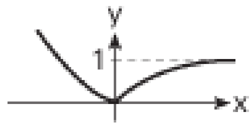
Questão 5

Das alternativas abaixo, a que melhor corresponde ao gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é:

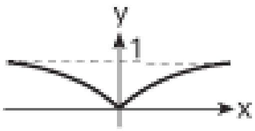
a)



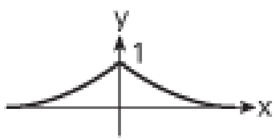
b)



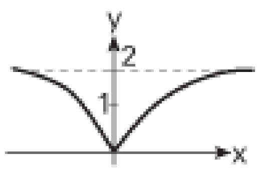
c)



d)

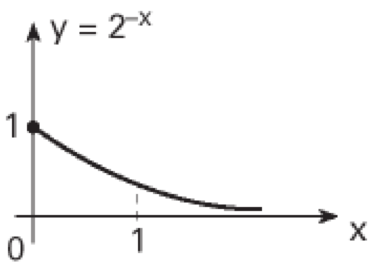


e)

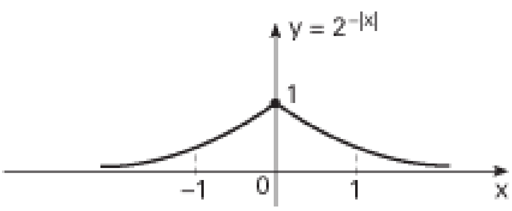


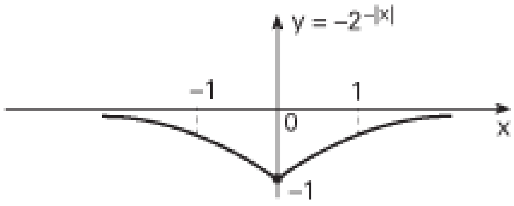
RESOLUÇÃO

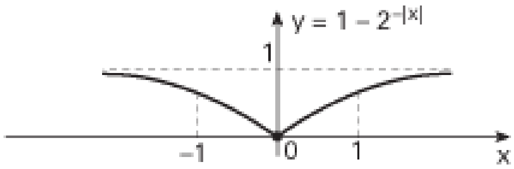
A função dada por $y = 2^{-x}$, com $x \geq 0$, é decrescente, positiva e menor ou igual a 1.



Temos então a seqüência de gráficos:







Resposta: C

Questão 6

Um número racional r tem representação decimal da forma $r = a_1a_2, a_3$ onde $1 \le a_1 \le 9$, $0 \le a_2 \le 9$, $0 \le a_3 \le 9$.

Supondo-se que:

- a parte inteira de r é o quádruplo de a_3,
- a_1, a_2, a_3 estão em progressão aritmética,
- a_2 é divisível por 3,

então a_3 vale:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 6
e) 9

RESOLUÇÃO:
Do enunciado, temos:
$10a_1 + a_2 = 4a_3$ e
$a_3 = 2a_2 \,.\, a_1$, pois (a_1, a_2, a_3) e uma P. A.
Logo, $10a_1 + a_2 = 4(2a_2 \,.\, a_1)$, ou seja,
$14a_1 = 7a_2$, ou ainda,
$a_2 = 2a_1 \therefore a_2 \in \{2, 4, 6, 8\}$.
Como a_2 e divisível por 3, podemos concluir que $a_2 = 6$.
Portanto, $a_1 = 3$.
De $a_3 = 2a_2 \,.\, a_1$, temos $a_3 = 9$.

Resposta: E

Questão 7

Se x é um número real, $x > 2$ e $\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:

a) $4 - 2\sqrt{3}$

b) $4 - \sqrt{3}$

c) $2 + 2\sqrt{3}$

d) $4 + 2\sqrt{3}$

e) $2 + 4\sqrt{3}$

Resolução:
Com $x > 2$, temos:

$$\log_2(x-2) - \log_4 x = 1$$

$$\log_2(x-2) - \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1$$

$$\log_2(x-2) - \frac{1}{2}\log_2 x = 1$$

$$2\log_2(x-2) - \log_2 x = 2$$

$$\log_2 \frac{(x-2)^2}{x} = 2$$

$$\frac{(x-2)^2}{x} = 2^2$$

$$(x-2)^2 = 4x$$

$$x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

Da condição $x > 2$, temos $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Resposta: D

Questão 8

Uma matriz real A é ortogonal se $AA^t = I$, onde I indica a matriz identidade e A^t indica a transposta de A.

Se $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ é ortogonal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

Resolução:
Do enunciado:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + x^2 & \frac{1}{2}y + xz \\ \frac{1}{2}y + xz & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} + x^2 = 1 \quad \therefore \quad x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}y + xz = 0 \quad \therefore \quad z = -\frac{y}{2x} \quad \therefore \quad z^2 = \frac{y^2}{4x^2} \quad \therefore \quad z^2 = \frac{y^2}{3}$$

$$y^2 + z^2 = 1 \quad \therefore \quad y^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \therefore \quad 4y^2 = 3 \quad \therefore \quad y^2 = \frac{3}{4}$$

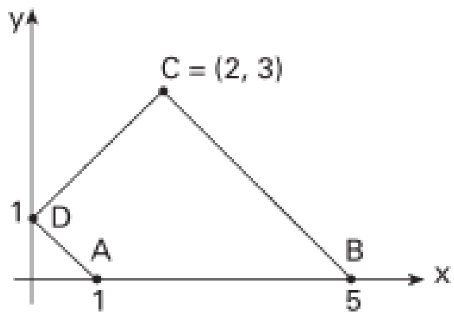
Assim:

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Resposta: E

Questão 9

Duas irmãs receberam como herança um terreno na forma do quadrilátero ABCD, representado abaixo em um sistema de coordenadas. Elas pretendem dividi-lo, construindo uma cerca reta perpendicular ao lado AB e passando pelo ponto P = (a, 0).



O valor de a para que se obtenham dois lotes de mesma área é:

a) $\sqrt{5} - 1$

b) $5 - 2\sqrt{2}$

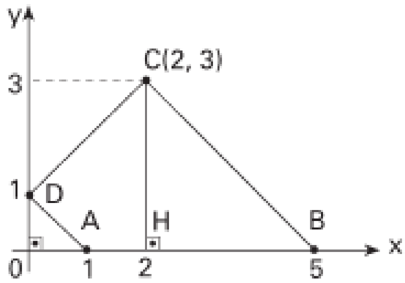
c) $5 - \sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{5}$

e) $5 + 2\sqrt{2}$

Resolução:

Do enunciado, temos a figura:



A área S_1 do quadrilátero AHCD é:

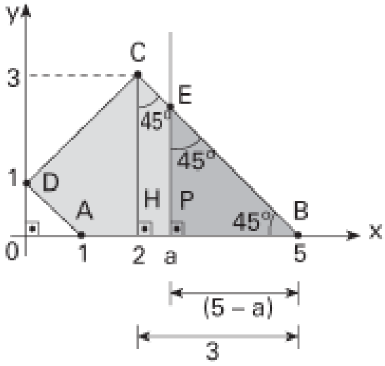
$$S_1 = \frac{(HC + OD) \cdot OH}{2} - \frac{OA \cdot OD}{2}$$

$$S_1 = \frac{(3+1) \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} \therefore S_1 = 3{,}5$$

A área S_2 do triângulo CHB é:

$$S_2 = \frac{HB \cdot HC}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{3 \cdot 3}{2} \therefore S_2 = 4{,}5$$

Se a cerca reta perpendicular ao lado AB divide ABCD em dois lotes de áreas iguais, então a cerca reta está à direita do ponto C e origina dois lotes de área 4 cada um, conforme a figura:



A área do triângulo isósceles EPB é 4.

Logo:

$$\frac{PB \cdot PE}{2} = 4$$

$$\frac{(5-a) \cdot (5-a)}{2} = 4$$

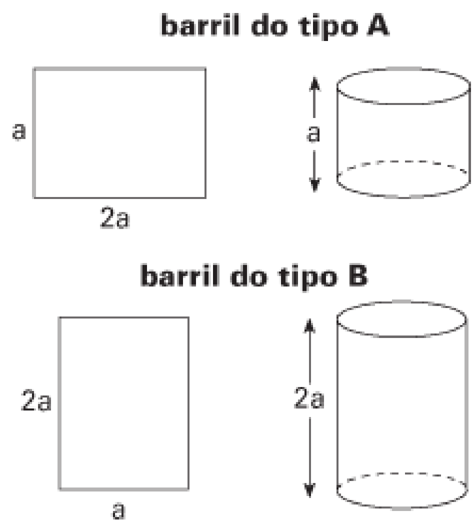
$$(5-a)^2 = 8 \begin{cases} a = 5 + 2\sqrt{2} \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ a = 5 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Portanto, $a = 5 - 2\sqrt{2}$.

Resposta: B

Questão 10

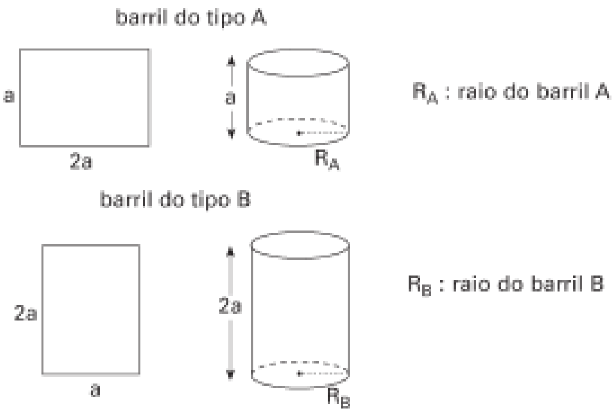
Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e 2a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado abaixo.



Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

a) $V_A = 2V_B$
b) $V_B = 2V_A$
c) $V_A = V_B$
d) $V_A = 4V_B$
e) $V_B = 4V_A$

Resolução:
Do enunciado, temos a figura:
Devemos ter:



$$2\pi R_A = 2a \therefore R_A = \frac{a}{\pi} \Rightarrow V_A = \pi \cdot \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \cdot a \quad \therefore \quad V_A = \frac{a^3}{\pi} \quad (1)$$

Ainda:

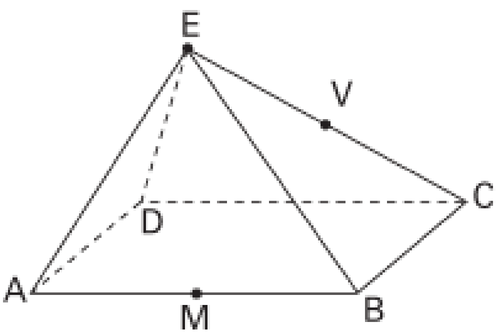
$$2\pi R_B = a \therefore R_B = \frac{a}{2\pi} \Rightarrow V_B = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot 2a \quad \therefore \quad V_B = \frac{a^3}{2\pi} \quad (2)$$

De (1) e (2), resulta que $V_B = \frac{1}{2} \cdot V_A$, ou seja, $V_A = 2V_B$.

Resposta: A

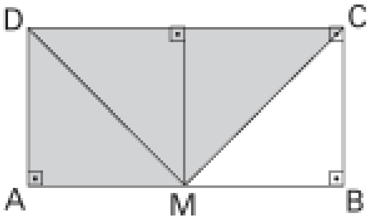
Questão 11

A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

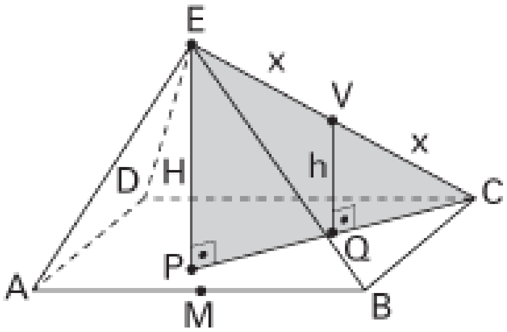


a) 1
b) 1,5
c) 2
d) 2,5
e) 3

Resolução:
Do enunciado, temos a figura:



Sendo S a área do retângulo ABCD, então a área do quadrilátero AMCD é $\frac{3}{4} \cdot S$. Na figura, onde H é a altura da pirâmide de base ABCD e h é a altura da pirâmide de base AMCD, VQ é base média do triângulo EPC. Logo, $h = \frac{H}{2}$.



Temos que: $\frac{1}{3} \cdot S \cdot H = 4 \quad$ (I)

O volume da pirâmide de base AMCD é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot S \cdot \frac{H}{2},$$

ou seja, $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H \cdot \frac{3}{8}$

De (I), temos que $V = 4 \cdot \frac{3}{8} \quad \therefore \quad V = 1{,}5$

Resposta: B

Questão 12

Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12
b) 18
c) 36
d) 72
e) 108

Resolução:

Uma das empresas necessariamente ficará com 2 trabalhos. Podemos efetuar a escolha desse bloco de 2 trabalhos de $C_{4,2}$ modos.

Esse bloco de 2 trabalhos junto com os dois trabalhos restantes podem ser distribuídos às 3 empresas de 3! maneiras.

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem:

$$C_{4,2} \cdot 3! = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot 3! = 36 \text{ maneiras.}$$

Resposta: C