Solução Comentada - Prova de Matemática

15 questões

01. O valor de x que é solução, nos números reais, da equação $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{x}{48}$ é igual a:

A) 36
B) 44
C) 52
D) 60
E) 68

Questão 1, alternativa C

$$\frac{6+4+3}{12}=\frac{x}{48}\therefore\frac{13}{12}=\frac{x}{48}\therefore x=52$$

02. Considere a função real de variável real, definida por $f(x) = 3 + 2^{-x}$. Então $f(\log_2 5)$ é igual a:

A) 4/5
B) 8/5
C) 12/5
D) 16/5
E) 4

Questão 2, alternativa D

Esta questão é extremamente simples e requer do vestibulando habilidade no uso de exponenciais e logaritmos.

$$f(\log_2 5) = 3 + 2^{[-\log_2 5]} = 3 + 2^{[\log_2 (1/5)]} = 3 + 1/5 = 16/5$$

03. Uma matriz é dita singular quando seu determinante é nulo. Então os valores de c que tornam singular a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix} \text{ são:}$$

A) 1 e 3
B) 0 e 9
C) –2 e 4
D) –3 e 5
E) –9 e –3

Questão 3, alternativa D

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix} = 27 + c + c - 3 - c^2 - 9 = -c^2 + 2c + 15.$$

Como a matriz é singular, o seu determinante é nulo. Logo,

$$c^2 - 2c - 15 = 0 \therefore c = -3 \text{ ou } c = 5.$$

Portanto, para c = – 3 e c = 5, a matriz dada é singular.

04. Uma seqüência de números reais é dita uma progressão aritmética de segunda ordem quando a seqüência formada pelas diferenças entre termos sucessivos for uma progressão aritmética. Assinale a alternativa na qual se encontra parte de uma progressão aritmética de segunda ordem.

A) (0, 5, 12, 21, 23)
B) (6, 8, 15, 27, 44)
C) (-3, 0, 4, 5, 8)
D) (7, 3, 2, 0, -1)
E) (2, 4, 8, 20, 30)

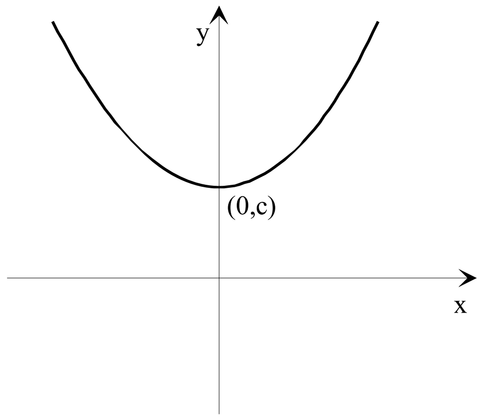
Questão 4, alternativa B

Esta questão é interessante, pois requer dos concorrentes habilidade de leitura compreensiva e posterior aplicação de um conceito. Construindo as seqüências das diferenças obtemos

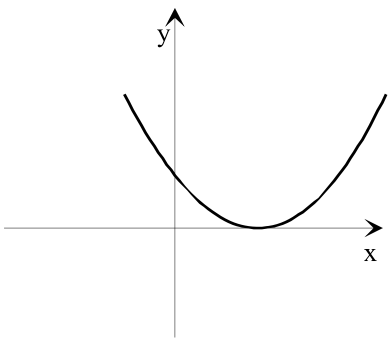
A) (5, 7, 9, 2)
B) (2, 7 12, 17)
C) (3, 4, 1, 3)
D) (–4, –1, –2, –1)
E) (2, 4, 12, 10)

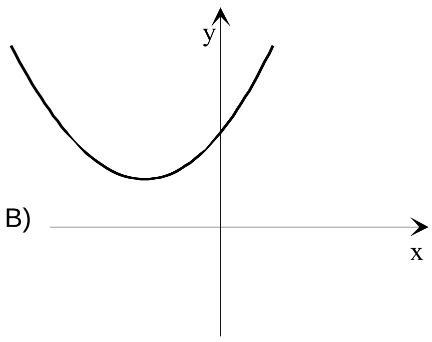
Claramente vemos que apenas (2, 7, 12, 17) representa uma parte de uma progressão aritmética. Portanto apenas a seqüência (6, 8, 15, 27, 44) contém parte de uma P. A. de segunda ordem.

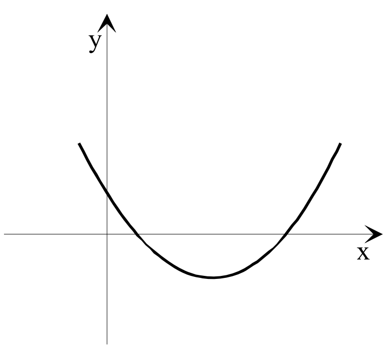
05. Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = x^2 + c$, $c > 0$ e $c \in R$, cujo gráfico é

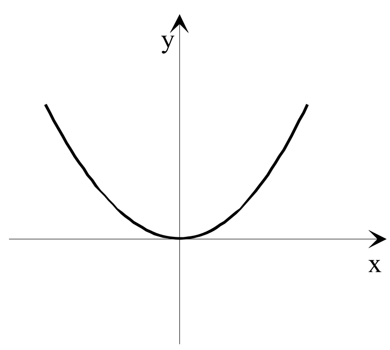


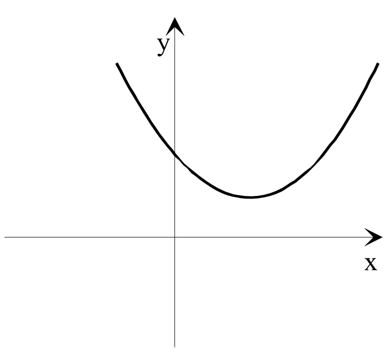
Então o gráfico que melhor representa $f(x + 1)$ é:

A)


B)


C)


D)


E)


Questão 5, alternativa B

A questão requer habilidade no uso de gráficos de funções quadráticas.

$$f(x + 1) = (x + 1)^2 + c = x^2 + 2x + 1 + c.$$

O discriminante $\Delta = 4 - 4\,(1 + c) = -4c$ é menor que zero e a abcissa do vértice é $x_0 = -1$. Por isso, o gráfico que melhor representa $f(x + 1)$ está na alternativa B.

06. O polinômio $P(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais, possui o número complexo *i* como uma de suas raízes. Então o produto $a{\cdot}b$ é igual a:

A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

Questão 6, alternativa A

A questão requer do vestibulando que ele saiba que se um número complexo é raiz de um polinômio cujos coeficientes.são reais então o conjugado desse número também é uma raiz. A seguir, basta usar o Teorema de D'Alembert.

$$P(i) = 2i^3 - i^2 + ai + b = 0$$
$$P(-i) = 2(-i)^3 - (-i)^2 - ai + b = 0$$

Ou seja: $-2i + 1 + ai + b = 0$
$$2i + 1 - ai + b = 0$$
$$\overline{}$$
$1 + b = 0 \therefore b = -1$, logo $-2i + 1 + ai - 1 = 0 \therefore a = 2$.

Portanto, $a \cdot b = -2$

07. Sabendo que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$, podemos afirmar corretamente que

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + \operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})$$

é igual a:

A) 0
B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$
E) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

Questão 7, alternativa C

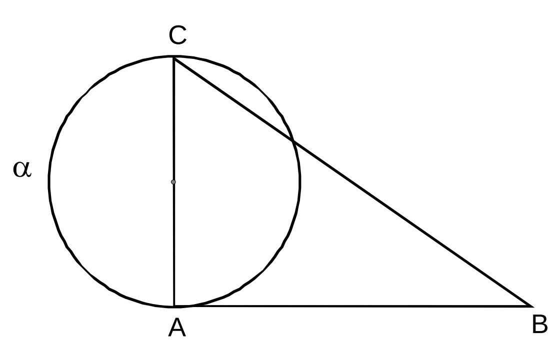
$$\begin{aligned}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\theta \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta \\ &= 0 - \operatorname{sen}\theta + 0 + \cos\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

08. Considere a figura abaixo, na qual:

- o segmento de reta $\overline{AB}$ é tangente à circunferência α em A;
- o segmento de reta $\overline{AC}$ é um diâmetro da circunferência α;
- o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ é igual à metade do comprimento da circunferência α.

Então a área do triângulo ABC dividida pela área de α é igual a:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{2}{3}$
C) 1
D) $\frac{4}{3}$
E) $\frac{5}{3}$



Questão 8, alternativa C

Como $\overline{AB}$ é tangente a α em A, então o triângulo BAC é retângulo em A. Logo, sua área é $S = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AB}$. Por hipótese, $\overline{AC} = 2r$ e $\overline{AB} = \pi r$. Então $S = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \pi r = \pi r^2$.

Portanto, a razão pedida é 1.

09. Sejam A e B matrizes 3 x 3 tais que detA = 3 e detB = 4. Então det(A x 2B) é igual a:

A) 32
B) 48
C) 64
D) 80
E) 96

Questão 9, alternativa E
Esta questão requer dos candidatos habilidade no uso das seguintes propriedades do cálculo de determinantes:
i) $\det(X\cdot Y) = \det(X)\cdot\det(Y)$
ii) $\det(kX) = k^n\det(X)$, (X_{nxn}).

Logo, $\det(A\cdot 2B) = \det(A)\cdot\det(2B) = 3\cdot 2^3\cdot 4 = 96$

10. A quantidade de números inteiros, positivos e ímpares, formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é igual a:

A) 320
B) 332
C) 348
D) 360
E) 384

Questão 10, alternativa A
É interessante notar que os algarismos escolhidos têm que ser distintos. Formemos um dos números pedidos sob a forma XYZ. Há 5 escolhas possíveis para Z pois XYZ é ímpar. Para X, há 8 escolhas possíveis, pois o zero não pode ser escolhido. Escolhidos X e Z, restam para Y 8 escolhas dentre os 10 algarismos oferecidos.

Logo, há $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$ números.

11. O número de pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{2} = 1$ é igual a:

A) 0
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Questão 11, alternativa C
Bastaria ao candidato traçar os gráficos da circunferência e da elipse.

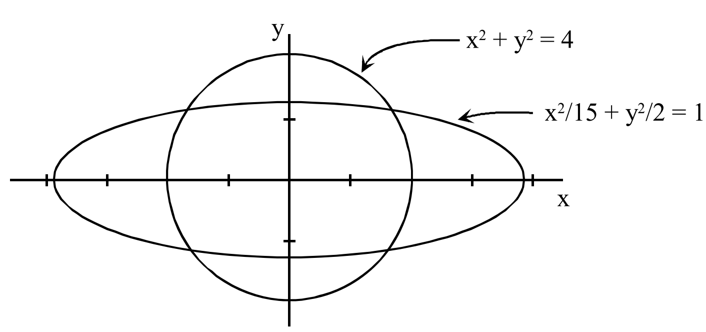
A existência de 4 pontos de interseção é visível na figura ao lado.
Uma outra solução seria resolver a equação

$$\frac{x^2}{15} + \frac{4 - x^2}{2} = 1.$$

$$2x^2 + 15(4 - x^2) = 30$$

$$2x^2 + 60 - 15x^2 = 30 \therefore 13x^2 = 30, \text{ ou}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{30}{13}}.$$



$y^2 = 4 - x^2 = 4 - \frac{30}{13} = \frac{22}{13} \therefore y = \pm\sqrt{\frac{22}{13}}$. Temos assim 4 pontos de interseção:

$$\left(\sqrt{\frac{30}{13}}, \sqrt{\frac{22}{13}}\right), \left(-\sqrt{\frac{30}{13}}, \sqrt{\frac{22}{13}}\right), \left(-\sqrt{\frac{30}{13}}, -\sqrt{\frac{22}{13}}\right), \left(\sqrt{\frac{30}{13}}, -\sqrt{\frac{22}{13}}\right)$$

12. Sejam $x = r\,\text{sen}\phi\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta$ e $z = r\cos\phi$, onde $0 \le \phi \le \pi$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a:

A) r^2
B) $r^2\text{sen}\theta$
C) $r^2\cos\phi$
D) $r^2\text{sen}\phi$
E) $r^2\cos\theta$

Questão 12, alternativa A
A questão requer dos candidatos habilidade em reconhecer a identidade fundamental da trigonometria circular:

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1.$
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\text{sen}^2\phi\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\phi\text{sen}^2\theta + r^2\cos^2\phi$
$= r^2\text{sen}^2\phi(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + r^2\cos^2\phi = r^2\text{sen}^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2(\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi) = r^2.$

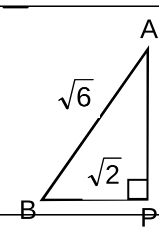
13. Um tetraedro regular tem arestas medindo $\sqrt{6}$ cm. Então a medida de suas alturas é igual a:

A) $\frac{1}{2}$ cm
B) 1 cm
C) $\frac{3}{2}$ cm
D) 2 cm
E) $\frac{5}{2}$ cm

Questão 13, alternativa D

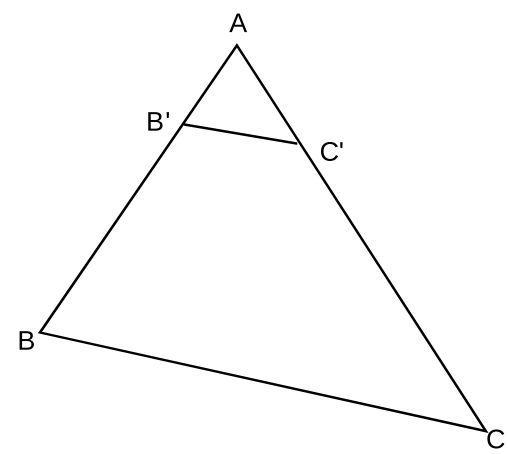
Sejam A e B vértices do tetraedro regular e P o pé da altura relativa a A. Então $\overline{AB} = \sqrt{6}$ e $\overline{BP} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$, pois P é baricentro do triângulo da base. Logo,

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{2})^2 + \overline{AP}^2 \therefore \overline{AP} = 2.$$



14. Na figura abaixo, os triângulos ABC e AB'C' são semelhantes. Se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = 4$ então o perímetro de AB'C' dividido pelo perímetro de ABC é igual a:

A) $\frac{1}{8}$
B) $\frac{1}{6}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{2}$
E) 1

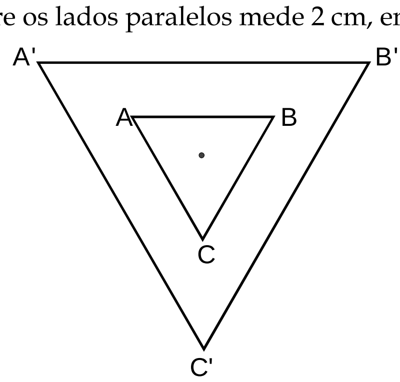


Questão 14, alternativa C

A razão entre os perímetros é a mesma que existe entre lados de triângulos semelhantes. Portanto, a razão entre o perímetro de AB'C' e o perímetro de ABC é $\frac{1}{4}$.

15. Na figura abaixo, temos dois triângulos equiláteros ABC e A'B'C' que possuem o mesmo baricentro, tais que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$. Se a medida dos lados de ABC é igual a $3\sqrt{3}$ cm e a distância entre os lados paralelos mede 2 cm, então a medida das alturas de A'B'C' é igual a:

A) 11,5 cm
B) 10,5 cm
C) 9,5 cm
D) 8,5 cm
E) 7,5 cm



Questão 15, alternativa C

A questão requer dos candidatos conhecimento de propriedades do triângulo eqüilátero e, em particular, do seu baricentro G. Se o lado de ABC é $3\sqrt{3}$, então sua altura é $3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$. Logo, a distância de G a qualquer lado de ABC é $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$. E a distância de G a qualquer lado de A'B'C' é $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. Ocorre que essa distância representa $\frac{1}{3}$ da altura de A'B'C'. Assim, a altura de A'B'C' mede $\frac{21}{2} = 10{,}5$ cm.

FIM DA PROVA DE MATEMÁTICA